



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Pohly

Voroného mozaiky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dňa

Podpis autora

Týmto by som chcel poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za odborné vedenie pri spracovaní tejto práce, za cenné rady a čas, ktorý mi venoval v priebehu písania. Zároveň by som chcel poďakovať rodine a priateľom, ktorí ma pri písaní práce neustále podporovali.

Název práce: Voroného mozaiky

Autor: Jakub Pohly

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V predloženej práci sa zaoberáme teóriou Voroného mozaík. Zaoberáme sa vlastnosťami Voroného mozaík obecné, ale sústredíme sa hlavne na tie mozaiky, ktoré sú náhodne generované. Skúmame bodové procesy, ktoré náhodne Voroného mozaiky vytvárajú. Definujeme najbežnejší Poissonov proces. Venujeme sa procesom obnovy, a to konkrétne obyčajnému procesu obnovy, modifikovanému procesu obnovy a rovnovážnemu procesu obnovy. S pomocou týchto procesov budujeme jednorozmernú verziu Poissonovho procesu. Voroného mozaiky skúmame prvotne na polpriamke. Neskôr získané výsledky zobecňujeme pre priamku a rovinu. V závere práce sa zaoberáme Voroného mozaikami v priestore.

Klíčová slova: mozaika, bodový proces, Poissonov proces, proces obnovy

Title: Voronoi tessellations

Author: Jakub Pohly

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the presented work we deal with the theory of Voronoi tessellations. We deal with the properties of general Voronoi tessellations, but we focus mainly on those tessellations that are randomly generated. We study the point processes that create random Voronoi tessellations. We define the most common Poisson process. We focus on the renewal processes, specifically the ordinary renewal process, the delayed process and the equilibrium renewal process. With the help of these processes, we build a one-dimensional version of the Poisson process. We examine Voronoi tessellations primarily on a semi-straight line. Later, we generalize the obtained results for the line and the plane. In the conclusion of the work we deal with Voronoi tessellations in space.

Keywords: tessellation, point process, Poisson process, renewal process

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 2 |
| Zoznam použitých skratiek | 3 |
| 1 Zavedenie pojmov | 4 |
| 1.1 Bodový proces | 4 |
| 1.1.1 Poissonov proces | 4 |
| 1.1.2 Proces obnovy | 5 |
| 1.2 Mozaika | 8 |
| 1.3 Voroného mozaika | 10 |
| 1.4 Konvolúcia funkcií | 12 |
| 2 Voroného mozaika v \mathbb{R} | 13 |
| 2.1 Voroného mozaika v \mathbb{R}^+ | 13 |
| 2.2 Náhodne generovaná mozaika v \mathbb{R}^+ | 14 |
| 2.2.1 P generovaná obyčajným procesom obnovy | 14 |
| 2.2.2 P generovaná modifikovaným procesom obnovy | 15 |
| 2.2.3 P generovaná rovnovážnym procesom obnovy | 17 |
| 2.2.4 P generovaná Poissonovým procesom | 17 |
| 2.2.5 Rozšírenie Poissonovho procesu na celé \mathbb{R} | 19 |
| 3 Voroného mozaika v \mathbb{R}^2 | 22 |
| 3.1 Obecná Voroného mozaika v \mathbb{R}^2 | 22 |
| 3.2 Náhodne generovaná mozaika v \mathbb{R}^2 | 25 |
| 4 Voroného mozaika v \mathbb{R}^3 | 27 |
| Zoznam použitej literatúry | 28 |

Úvod

História skúmania Voroného mozaík siaha do prvej polovice 17. storočia. Používal ich už Descartes, keď popisoval rozdelenie hmoty v slnečnej sústave. Podrobnejšie sa týmto konceptom zaoberal až v 19. storočí Dirichlet, ktorý skúmal dvojrozmerné a trojrozmerné mozaiky, a neskôr na začiatku 20. storočia Voronoi, ktorý zobecnil koncept takto generovaných mozaík do priestoruobecnej dimenzie. Uplatnenie si tieto mozaiky rýchlo našli v odboroch ako geofyzika, meteorológia alebo kryštalografia.

Známe využitie konceptu Voroného mozaiky bolo v roku 1854, kedy v Londýne vypukla epidémia cholery. Jedným z tých, ktorý sa epidémiou zaoberali, bol aj matematik John Snow, ktorý rozložil mapu Londýna na oblasti podľa toho, ktorá studňa bola k danému miestu najbližšie. Tým v podstate vytvoril Voroného mozaiku generovanú miestami, kde sa nachádzali studne. Vďaka tomuto prístupu zistil, že väčšina obetí nákazy žila v oblasti, ktorá prislúchala studni na Broad Street. Tým sa podarilo identifikovať zdroj choroby.

V súčasnosti sa Voroného mozaiky využívajú v širokom spektre rôznych odborov. Od lingvistiky na popis dialektov v rôznych regiónoch cez prírodné vedy ako biológia na popis buniek alebo astrofyzika. Využitie nachádzajú aj v letectve alebo mestskom plánovaní. Príkladom môžu byť niektoré oblasti, kde študentov rozdeľujú do škôl podľa toho, ktorá sa nachádza najbližšie k ich domovom. S rozvojom počítačových technológií sa Voroného mozaiky uplatňujú v ďalších oblastiach ako siete, počítačová grafika alebo strojové učenie.

Cieľom tejto práce je čitateľa zoznámiť so základnými vlastnosťami Voroného mozaík na priamke, v rovine a v priestore. Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole zavedieme skúmané pojmy, zoznámime sa s bodovými procesmi a mozaikami. V druhej kapitole sa budeme podrobne venovať Voroného mozaikám na priamke a polpriamke. V tretej kapitole preskúmame vybrané charakteristiky Voroného mozaík v rovine a napokon v štvrtej kapitole sa pozrieme na Voroného mozaiky v priestore.

Zoznam použitých skratiek

| | |
|-------------------------------------|---|
| \mathbb{R} | množina reálnych čísel |
| \mathbb{N} | množina prirodzených čísel |
| \mathbb{Z} | množina celých čísel |
| \mathbb{N}_0 | $\mathbb{N} \cup 0$ |
| \mathbb{R}^n | n rozmerný Euklidov priestor |
| \mathbb{R}^+ | interval $[0, \infty)$ |
| $\dim(A)$ | dimenzia množiny A |
| $\text{card}(A)$ | počet prvkov množiny A |
| $\text{int}(A)$ | vnútrojšok množiny A |
| $\text{conv}(A)$ | konvexný obal množiny A |
| ∂A | hranica množiny A |
| $\text{diam}(A)$ | priemer množiny A |
| \mathcal{B}^n | systém borelovských množín |
| \mathcal{B}_0^n | systém obmedzených borelovských množín |
| $\sigma(A)$ | najmenšia σ -algebra obsahujúca všetky prvky množiny A |
| $\ \cdot\ $ | euklidovská norma |
| $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ | pravdepodobnostný priestor |
| $\mathbb{I}\{A\}$ | indikátorová funkcia množiny A |
| $\mathbb{E}X$ | stredná hodnota náhodnej veličiny X |
| $\text{var}(X)$ | rozptyl náhodnej veličiny X |
| $\text{cov}(X, Y)$ | kovariancia náhodných veličín X a Y |
| $\text{cor}(X, Y)$ | koefficient korelácie náhodných veličín X a Y |
| F_X | distribučná funkcia náhodnej veličiny X |
| f_X | hustota náhodnej veličiny X |
| $B(x, \varepsilon)$ | uzavretá guľa so stredom x a polomerom ε |

1. Zavedenie pojmov

1.1 Bodový proces

Koncept bodových procesov a Poissonovho procesu je prevzatý z [1]. Označme \mathcal{B}^n systém borelovských podmnožín \mathbb{R}^n a $\mathcal{B}_0^n \subseteq \mathcal{B}^n$ systém obmedzených borelovských množín. Definujme priestor lokálne konečných podmnožín \mathbb{R}^n ako

$$\mathcal{N} = \{\varphi \subseteq \mathbb{R}^n : \varphi(B) < \infty, \forall B \in \mathcal{B}_0^n\},$$

kde $\varphi(B)$ označuje počet bodov množiny $\varphi \cap B$. Na \mathcal{N} možno zaviesť σ -algebru nasledovne:

$$\mathfrak{n} = \sigma\left\{\{\varphi \in \mathcal{N} : \varphi(B) = m\}, m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^n\right\}.$$

Bodový proces môžeme definovať ako náhodnú lokálne konečnú bodovú konfiguráciu (prvok \mathcal{N}).

Definícia 1 (Bodový proces).

Bodový proces Φ je merateľné zobrazenie $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{n})$, kde $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Rozdelenie bodového procesu je miera Π na $(\mathcal{N}, \mathfrak{n})$ definovaná vzťahom $\Pi(U) = \mathbb{P}(\Phi \in U)$, $U \in \mathfrak{n}$.

Definícia 2 (Stacionárny bodový proces).

Nech Φ je bodový proces, potom Φ nazveme stacionárny bodový proces, ak $\Phi + y$ má rovnaké rozdelenie ako Φ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$.

1.1.1 Poissonov proces

Najzákladnejším modelom bodových procesov je Poissonov proces. Používa sa ako základ k popisu zložitejších modelov. Medzi bodmi Poissonovho procesu neexistujú žiadne interakcie, pretože sú úplne nezávislé.

Definícia 3 (Poissonov proces).

Buď Λ lokálne konečná miera na \mathbb{R}^n taká, že $\Lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Bodový proces Φ splňujúci vlastnosti

- 1. náhodná veličina $\text{card}(\Phi \cap B)$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\Lambda(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}_0^n$,*
- 2. ak sú $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0^n$ po dvoch disjunktné, potom $\text{card}(\Phi \cap B_1), \text{card}(\Phi \cap B_2), \dots, \text{card}(\Phi \cap B_k)$ sú nezávislé náhodné veličiny $\forall k \in \mathbb{N}$,*

nazveme Poissonovým bodovým procesom s mierou intenzity Λ . Ak existuje hustota λ miery Λ voči Lebesgueovej miere a je konštantná, potom Φ je homogénny Poissonov proces s intenzitou λ .

Lemma 1 (Stacionarita Poissonovho procesu).

Homogénny Poissonov proces je stacionárny.

Dôkaz.

Nech Φ je homogénny Poissonov proces, potom pre každú obmedzenú borelovskú množinu B platí: $\text{card}(\Phi \cap B)$ má rovnaké rozdelenie ako $\text{card}(\Phi \cap (B+y))$, $\forall y$. Plynie to z toho, že hustota λ miery intenzity Λ je konštantná na \mathbb{R}^n , teda rozdelenie $\text{card}(\Phi \cap B)$ závisí len od Lebesgueovej miery množiny B . Z toho vyplýva, že rozdelenie Φ nezávisí od posunutia, teda homogénny Poissonov proces je stationárny. □

1.1.2 Proces obnovy

Obmedzíme sa teraz na $n = 1$ a zavedieme si špeciálnu triedu bodových procesov na \mathbb{R} . Ako si neskôr ukážeme, do tejto triedy patrí aj jednorozmerný prípad Poissonovho procesu.

Definícia 4 (Proces obnovy).

Nech $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín, $P(X_i > 0) = 1$. Procesom obnovy rozumieme postupnosť náhodných veličín $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$, pre ktoré platí $T_1 = X_1, T_2 = X_1 + X_2, \dots, T_k = \sum_{i=1}^k X_i, k \in \mathbb{N}$.

Takto zadefinovaný proces obnovy sa nazýva obyčajný proces obnovy. Zadefinujeme si ešte modifikovaný a rovnovážny proces obnovy.

Definícia 5 (Modifikovaný a rovnovážny proces obnovy).

Nech $\{X_2, X_3, \dots\}$ je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, $P(X_i > 0) = 1, i = 2, 3, \dots$ a X_1 je na nich nezávislá náhodná veličina, $P(X_1 \geq 0) = 1$. Modifikovaným procesom obnovy rozumieme postupnosť náhodných veličín $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ definovaných ako vyššie.

Nech F_X je distribučná funkcia a μ je stredná hodnota náhodnej veličiny X_2 a hustotu náhodnej veličiny X_1 definujeme predpisom:

$$f_{X_1}(t) = \frac{1 - F_X(t)}{\mu} \mathbb{I}_{\{t > 0\}}$$

potom postupnosť náhodných veličín $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ nazývame rovnovážny proces obnovy.

Veta 2 (Rovnovážny proces obnovy).

Nech $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ je postupnosť nezávislých náhodných veličín ako v definícii rovnovážneho procesu obnovy, μ_k je k -tý obecný moment náhodnej veličiny X_2 , potom náhodná veličina X_1 je dobre definovaná a pre jej obecné momenty platí:

$$\mathbb{E}X_1^k = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1}.$$

Dôkaz.

Na overenie, že X_1 je dobre definovaná náhodná veličina potrebujeme overiť, že $1 = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t) dt$. Označme F_X distribučnú funkciu náhodnej veličiny X_2 .

Platí:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - F_X(t)}{\mu_1} \mathbb{I}\{t > 0\} dt = \int_0^{\infty} \frac{1 - F_X(t)}{\mu_1} dt \\ &= \frac{1}{\mu_1} [t(1 - F_X(t))]_0^{\infty} - \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} -t dF_X(t) = \frac{1}{\mu_1} (0 + \mu_1) = 1.\end{aligned}$$

Teda X_1 je dobre definovaná nezáporná náhodná veličina.

Pre jej momenty platí:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^k &= \int_{\mathbb{R}} t^k f_{X_1}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t^k \frac{1 - F_X(t)}{\mu_1} \mathbb{I}\{t > 0\} dt = \int_0^{\infty} t^k \frac{1 - F_X(t)}{\mu_1} dt \\ &= \frac{1}{(k+1)\mu_1} [t^{k+1}(1 - F_X(t))]_0^{\infty} - \frac{1}{(k+1)\mu_1} \int_0^{\infty} -t^{k+1} dF_X(t) \\ &= \frac{1}{(k+1)\mu_1} (0 + \mu_{k+1}) = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1}.\end{aligned}$$

□

Špeciálne pre strednú hodnotu a rozptyl náhodnej veličiny X_1 platí: $\mathbb{E}X_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ a $\text{var}(X_1) = \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2}$.

Veta 3 (O Poissonovom procese na \mathbb{R}^+).

Nech $\{X_2, X_3, \dots\}$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodne veličiny s distribučnou funkciou $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{I}\{x > 0\}$, $\lambda > 0$. Ďalej nech X_1 je na nich nezávislá náhodná veličina s rovnakým rozdelením (OPO) alebo s hustotou $f_{X_1} = \frac{1-F_X}{\mathbb{E}X}$ (RPO), potom je rozdelenie náhodnej veličiny X_1 v oboch prípadoch rovnaké a postupnosť náhodných veličín $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$, kde $P_k = \sum_{i=1}^k X_i$ tvorí Poissonov proces.

Dôkaz.

Hustota X_1 je v prípade (OPO) rovná: $f_X(x) = [F_X(x)]' = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\}$. V prípade (RPO) je hustota rovná:

$$f_{X_1}(x) = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda x})}{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx} \mathbb{I}\{x > 0\} = \frac{e^{-\lambda x}}{\frac{1}{\lambda}} \mathbb{I}\{x > 0\} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\} = f_X(x).$$

Zostáva ukázať že $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ je Poissonov proces. Nech $(a, a+h]$ je interval, potom pre počet N bodov množiny P v intervale $(a, a+h]$ platí:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}\left(\text{card}\left(P \cap (a, a+h]\right) = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\text{card}\left(\left\{i : \sum_{j=1}^i X_j \in (a, a+h]\right\}\right) = k\right).\end{aligned}$$

Definujme si náhodnú veličinu $N_t := \text{card}(P \cap (0, t])$, $t > 0$. Keďže náhodná veličina X má exponenciálne rozdelenie, ktoré má špeciálnu vlastnosť (rozdelenie bez pamäte) $\mathbb{P}(X > t+a | X > a) = \mathbb{P}(X > t)$, tak $\forall k, m \in \mathbb{N}_0$ bude platiť:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{a+h} = k+m | N_a = m) \\ = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k+m} X_j \leq a+h < \sum_{j=1}^{k+m+1} X_j \mid \sum_{j=1}^m X_j \leq a < \sum_{j=1}^{m+1} X_j\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^{k+m} X_j \leq a+h < \sum_{j=1}^{k+m+1} X_j \middle| \sum_{j=1}^m X_j \leq a, X_{m+1} > a - \sum_{j=1}^m X_j \right) \\
&= \mathbf{P} \left(\sum_{j=m+1}^{k+m} X_j \leq h < \sum_{j=m+1}^{k+m+1} X_j \middle| \sum_{j=1}^m X_j \leq a \right) \\
&= \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^k X_j \leq h < \sum_{j=1}^{k+1} X_j \right) = \mathbf{P}(N_h = k).
\end{aligned}$$

Pre N potom bude platiť:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N = k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_{a+h} = k+m, N_a = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_{a+h} = k+m | N_a = m) \mathbf{P}(N_a = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_h = k) \mathbf{P}(N_a = m) = \mathbf{P}(N_h = k) \\
&= \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^k X_j \leq h < \sum_{j=1}^{k+1} X_j \right) \\
&= \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^{k+1} X_j > h \right) - \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^k X_j > h \right).
\end{aligned}$$

Z toho vidíme, že počet bodov v intervale $(a, a+h]$ závisí len od dĺžky intervalu h a nezávisí od priebehu procesu pred bodom a . Súčet k nezávislých exponenciálnych rozdelení s parametrom λ má rozdelenie $\Gamma(k, \lambda)$. Teda:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N = k) &= 1 - F_{\Gamma(k+1, \lambda)}(h) - (1 - F_{\Gamma(k, \lambda)}(h)) \\
&= F_{\Gamma(k, \lambda)}(h) - F_{\Gamma(k+1, \lambda)}(h) = \frac{\int_0^{\lambda h} t^{k-1} e^{-t} dt}{\Gamma(k)} - \frac{\int_0^{\lambda h} t^k e^{-t} dt}{\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{\int_0^{\lambda h} t^{k-1} e^{-t} dt}{\Gamma(k)} - \frac{\left(\left[-t^k e^{-t} \right]_0^{\lambda h} + \int_0^{\lambda h} k t^{k-1} e^{-t} dt \right)}{\Gamma(k+1)} = \frac{(\lambda h)^k e^{-\lambda h}}{k!}.
\end{aligned}$$

Teda počet bodov množiny P v intervale $(a, a+h]$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom λh , takže prvú podmienku Poissonovho procesu máme splnenú.

Druhá podmienka plynie z toho, ako sme už skôr ukázali, že počet bodov v intervale nezávisí od toho, čo sa deje mimo skúmaného intervalu, závisí len od jeho dĺžky. To znamená, že počty bodov v disjunktných intervaloch sú nezávislé. Z toho vyplýva, že aj druhá podmienka Poissonovho procesu je splnená. Teda množina P tvorí homogénny Poissonov proces s intenzitou λ .

□

Pre podrobnejšie vzťahy medzi procesom obnovy a Poissonovým procesom, odkazujem na [2].

1.2 Mozaika

Koncept mozaík v tejto práci je prevzatý prevažne z [3]. Čiastočne je inšpirovaný aj [4, 5].

Definícia 6 (d -polytop).

Nech $d, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq d \leq n$. Množinu B nazveme d -polytop v \mathbb{R}^n , ak $\dim(B) = d$ a existuje konečná množina A taká, že $B = \text{conv}(A)$.

Pre $d \in \{0, 1, 2\}$ nazývame d -polytop bod, úsečka, mnohoúhelník. Polytopy sú konvexné obmedzené a uzavreté množiny. V \mathbb{R}^n je postačujúca podmienka kompaktnosti obmedzenosť a uzavretosť, teda polytopy sú kompaktné. Špeciálne ešte označujeme polytopy, ktoré tvoria hranicu iného polytopu.

Definícia 7 (s -faseta).

Nech množina B je d -polytop. Hranica ∂B tejto množiny pozostáva z s -polytopov, pre $s \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Tieto s -polytopy sa nazývajú s -fasety polytopu B .

Samotný d -polytop môžeme bez ujmy na obecnosti považovať za d -fasetu. Pre $s \in \{0, 1, 2\}$ nazývame s -fasetu vrchol, hrana, stena.

Definícia 8 (Mozaika v \mathbb{R}^n).

Nech I je spočítaná indexová množina. Množinu

$$M := \{M_i : M_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I\}$$

nazveme mozaikou ak platí:

1. $\text{int}(M_i) \cap \text{int}(M_j) = \emptyset, \forall i, j \in I, i \neq j$,
2. $\bigcup_{i \in I} M_i = \mathbb{R}^n$,
3. $\forall B \subset \mathbb{R}^n, B$ obmedzené platí: $\text{card}(M_i \in M : M_i \cap B \neq \emptyset, i \in I) < \infty$,
4. M_i je n -polytop $\forall i \in I$.

Množinu M_i nazývame bunkou mozaiky. Prvá podmienka nám hovorí, že jednotlivé bunky mozaiky sa neprekrývajú, spoločnú majú nanajvýš hranicu. Druhá podmienka hovorí, že jednotlivé bunky vyplnia celý priestor \mathbb{R}^n . Tretia podmienka hovorí o tom, že bunky tvoria lokálne konečnú množinu, teda, že každá obmedzená množina obsahuje konečne veľa buniek. Posledná podmienka vraví, že bunka je n -polytop, teda, že je konvexná, kompaktná a má dimenziu n .

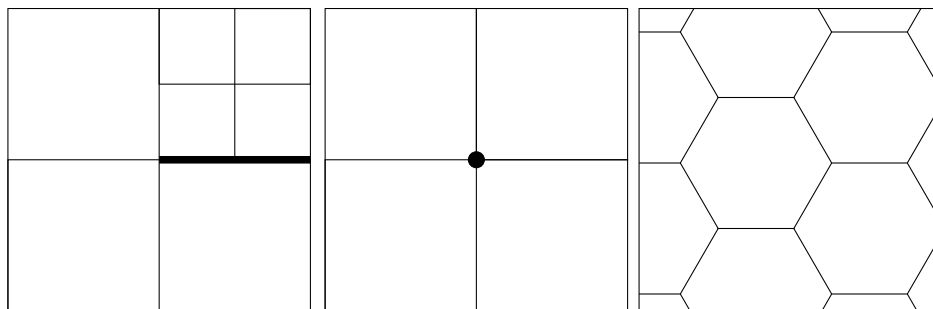
Označíme si $\mathcal{F}_s(M_i)$ množinu s -faset M_i a $\mathcal{F}_s(M) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_s(M_i)$ množinu s -faset všetkých buniek mozaiky M . Ďalej označíme $F(y)$ prienik buniek M obsahujúcich bod y . Množina $F(y)$ je prienik konečne veľa n -polytopov teda je to s -polytop pre nejaké $s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Označíme $\mathcal{S}_s(M) = \{F(y) : \dim F(y) = s, y \in \mathbb{R}^n\}$ množinu s -faset mozaiky M .

Definícia 9 (Regulárna a normálna mozaika).

Mozaika M je regulárna práve vtedy, ak platí $\mathcal{S}_s(M) = \mathcal{F}_s(M)$, $\forall s \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Mozaika M je normálna práve vtedy, ak je regulárna a pre každú s -fasetu mozaiky platí, že sa nachádza na hranici $n - s + 1$ buniek pre $s \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Podmienka regularity je vždy splnená pre $s = 0$ a $s = n$. Príklady rôznych mozaík v rovine možno vidieť na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Na obrázku môžeme vidieť tri mozaiky, mozaika vľavo nie je regulárna, pretože zvýraznená hrana je hranou bunky pod ňou ale nie je hranou mozaiky, mozaika v strede je regulárna, ale nie je normálna pretože zvýraznený bod je na hranici štyroch buniek avšak $n - s + 1 = 2 - 0 + 1 = 3$. Mozaika vpravo je regulárna a normálna.

1.3 Voroného mozaika

Definícia 10 (Voroného mozaika v \mathbb{R}^n).

Nech $P \subset \mathbb{R}^n$, $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ je lokálne konečná množina, ktorá splňuje $\text{conv}(P) = \mathbb{R}^n$. Definujeme:

$$V_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j \in \mathbb{N}, j \neq i\}.$$

Potom $V := \{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ sa nazýva Voroného mozaika.

Veta 4 (Voroného mozaika je mozaika).

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\|\cdot\|$ je štandardná euklidovská norma v \mathbb{R}^n , teda $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Potom Voroného mozaika V je mozaika.

Dôkaz.

Nech B je obmedzená množina v \mathbb{R}^n . Zvoľme ľubovoľný bod $x_0 \in B$ a ľubovoľný bod $p_i \in P$. Definujeme množinu $B_0 := B(x_0, 2 \text{diam}(B) + \|x_0 - p_i\|)$. Potom platí, že B_0 je obmedzená a $\forall p_j \in P \setminus B_0, \forall x \in B : \|x - p_i\| < \|x - p_j\|$. Teda $B \cap V_k \neq \emptyset$ len pre také k , pre ktoré platí $p_k \in B_0$. Množina B_0 je obmedzená, teda $\{k : B \cap V_k \neq \emptyset\}$ je konečná z lokálnej konečnosti P . To nám dáva tretiu podmienku.

Každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ patrí aspoň do jednej množiny V_i , teda druhá podmienka je splnená tiež.

Ďalej overíme prvú podmienku. Pre spor predpokladajme, že máme dve množiny $V_i \neq V_j$, pre ktoré platí $\text{int}(V_i) \cap \text{int}(V_j) \neq \emptyset$. Z toho vyplýva, že

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \forall y \in B(x, \varepsilon) : \|y - p_i\| = \|y - p_j\|.$$

Volíme $y = x + z$, kde $z = \frac{\varepsilon}{2} \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}$. Potom $y \in B(x, \varepsilon)$. Ukážeme, že ak $\|x - p_i\| = \|x - p_j\|$, potom $\|y - p_i\| = \|y - p_j\|$ vedie k sporu. Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \|y - p_i\| &= \|y - p_j\| \\ 0 &= \|y - p_i\|^2 - \|y - p_j\|^2 \\ 0 &= \|x + z - p_i\|^2 - \|x + z - p_j\|^2 \\ 0 &= \|x - p_i\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle z, x - p_i \rangle - \|x - p_j\|^2 - \|z\|^2 - 2\langle z, x - p_j \rangle \\ 0 &= \langle z, p_j - p_i \rangle = \frac{\varepsilon}{2 \|p_j - p_i\|} \langle p_j - p_i, p_j - p_i \rangle \end{aligned}$$

a to je spor. Teda prvá podmienka je splnená.

Zostáva overiť štvrtú podmienku. Najprv ukážeme, že $\dim(V_i) = n, \forall i \in \mathbb{N}$. To plynie z toho, že $\forall i \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_i : B(p_i, \varepsilon_i) \subset V_i$. Konvexnosť V_i plynie z toho, že $V_i = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|\}$, čo je spočetný prienik konvexných množín. Ostáva ukázať, že V_i je obmedzené. Budeme postupovať ako v [6]. Predpokladajme pre spor, že V_i nie je obmedzené, potom musí existovať vektor $u \neq 0$ tak, že $p_i + \alpha u \in V_i, \forall \alpha > 0$. Ďalej $\forall \alpha > 0$ platí, že kružnica so stredom $p_i + \alpha u$ a polomerom α prechádza bodom p_i a v jej vnútri sa nenachádza žiaden bod P . Pre $\alpha \rightarrow \infty$ dostaneme, že existuje polpriestor, ktorý neobsahuje žiaden bod P , čo je spor s predpokladom $\text{conv}(P) = \mathbb{R}^n$. To nám dáva štvrtú podmienku a z toho už vyplýva, že Voroného mozaika je mozaika. □

Lemma 5.

Nech V je Voroného mozaika v \mathbb{R}^n a $x \in V_i \cap V_j, i \neq j$, potom x leží v nadrovine, ktorá prechádza stredom medzi p_i a p_j , a zároveň je kolmá na spojnicu p_i a p_j .

Dôkaz.

Nech $x \in V_i \cap V_j$, teda musí platiť:

$$\|x - p_i\| = \|x - p_j\| \leq \|x - p_k\|, \forall k : j \neq k \neq i.$$

Umocnením prvej rovnosti na druhú dostaneme:

$$\begin{aligned} \langle x - p_i, x - p_i \rangle &= \langle x - p_j, x - p_j \rangle \\ \langle x, x \rangle - \langle x, p_i \rangle - \langle p_i, x \rangle + \langle p_i, p_i \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle x, p_j \rangle - \langle p_j, x \rangle + \langle p_j, p_j \rangle \\ 2\langle x, p_j - p_i \rangle &= \langle p_j, p_j \rangle - \langle p_i, p_i \rangle = \langle p_j + p_i, p_j - p_i \rangle \\ x^T (p_j - p_i) &= \left(\frac{p_j + p_i}{2} \right)^T (p_j - p_i). \end{aligned}$$

Z toho už plynie tvrdenie. □

1.4 Konvolúcia funkcií

Definícia 11 (Konvolúcia funkcií).

Nech f_1 a f_2 sú funkcie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, potom konvolúciou funkcií f_1 a f_2 nazveme takú funkciu f , pre ktorú platí:

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x) dx.$$

Konvolúcia je využívaná pri práci s náhodnými veličinami. Nech f_{X_1} a f_{X_2} sú hustoty nezávislých náhodných veličín X_1 a X_2 , potom hustota náhodnej veličiny $X_1 + X_2$ je rovná $f_{X_1+X_2}(t) = (f_{X_1} * f_{X_2})(t)$.

2. Voroného mozaika v \mathbb{R}

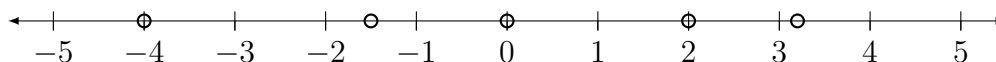
Uvažujme usporiadanú lokálne konečnú množinu P reálnych čísel $P = \{\dots, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots\}$. Voroného mozaika V generovaná množinou P je postupnosť uzavretých intervalov $V_i = [W_{i-1}, W_i]$, kde body W_i nazývame vrcholy Voroného mozaiky V . Veľkosť Voroného bunky V_n budeme označovať ako $L_n := W_n - W_{n-1}$. Príklad na množinu P a vrcholy W Voroného mozaiky môžeme vidieť na obrázku 2.1 a obrázku 2.2.

Veta 6 (Voroného mozaika v \mathbb{R}).

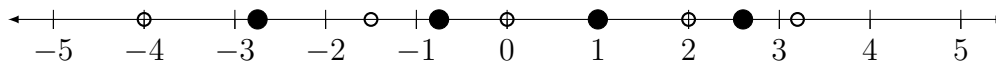
Nech $P = \{\dots, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots\}$ je usporiadaná lokálne konečná množina a V je ňou generovaná Voroného mozaika na \mathbb{R} , potom Voroného bunky sú tvaru $V_i = [W_{i-1}, W_i]$, kde $W_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$.

Dôkaz.

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $x \in V_i$, potom z definície Voroného mozaiky pre x platí: $|x - P_i| \leq |x - P_j|, \forall j \neq i$. Nech $j > i$ potom $P_j > P_i$. Pre $x \leq P_i$ je podmienka určite splnená, pre $x \geq P_j$ podmienka určite splnená nie je. Zameriame sa na prípad $P_i < x < P_j$. V tom prípade musí platiť $x - P_i \leq P_j - x$ teda $x \leq \frac{P_i + P_j}{2}, \forall j > i$. Pre $j < i$ dostaneme obdobne $x \geq \frac{P_i + P_{i-1}}{2}$. Prienikom týchto množín dostaneme $x \in \left[\frac{P_i + P_{i-1}}{2}, \frac{P_i + P_{i+1}}{2}\right]$. □



Obr. 2.1: Príklad množiny P .



Obr. 2.2: Množina P z obrázku 2.1 spolu s vrcholmi W Voroného mozaiky.

2.1 Voroného mozaika v \mathbb{R}^+

Môžeme sa však obmedziť len na množinu $[0, \infty)$. V takom prípade uvažujeme lokálne konečnú usporiadanú množinu nezáporných čísel $P = \{P_1, P_2, \dots\}$. Voroného mozaika bude ako v predošlom prípade postupnosť uzavretých intervalov $V_i = [W_{i-1}, W_i]$, kde body W_i nazývame vrcholy Voroného mozaiky V . Veľkosť Voroného bunky V_n budeme opäť označovať $L_n := W_n - W_{n-1}$. Na rozdiel od predošlého prípadu sa tentokrát pohybujeme na zľava ohraničenom priestore, preto bude platiť: $W_0 := 0$.

2.2 Náhodne generovaná mozaika v \mathbb{R}^+

2.2.1 P generovaná obyčajným procesom obnovy

Predpokladajme teraz, že množina P generátorov Voroného mozaiky je generovaná obyčajným procesom obnovy. Máme teda množinu nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2 , pre ktoré platí: $P(X_i > 0) = 1$. Pre body množiny P platí: $P_k = \sum_{i=1}^k X_i, k = 1, 2, \dots$. Vrcholy Voroného mozaiky v \mathbb{R} ležia v strede medzi dvoma susednými generátormi, teda množina vrcholov $W = \{W_1, W_2, \dots\}$, kde $W_k = \frac{P_k + P_{k+1}}{2}$. Ďalej budeme skúmať vzdialenosti susedných vrcholov, teda veľkosti L_k Voroného buniek.

Platí:

$$L_k = W_k - W_{k-1} = \frac{P_k + P_{k+1}}{2} - \frac{P_{k-1} + P_k}{2} = \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2} = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$$

pre $k \geq 2$. Pre $k = 1$ máme ale $W_0 = 0$, preto platí:

$$L_1 = W_1 - 0 = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{X_1 + X_1 + X_2}{2} = X_1 + \frac{X_2}{2}.$$

Vezmime $n > 1$. Pre L_n platia nasledujúce tvrdenia:

Veta 7 (Vlastnosti L_n pri OPO).

Nech množina P je generovaná obyčajným procesom obnovy, potom pre veľkosť L_n Voroného bunky, kde $n > 1$, budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_n = \mu$,
- $\text{var}(L_n) = \frac{\sigma^2}{2}$,
- $\text{cov}(L_n, L_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{4}$,
- $\text{cov}(L_n, L_{n+k}) = 0, k = 2, 3, \dots$,
- $\text{cor}(L_n, L_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L_n &= \frac{\mathbb{E}X_n + \mathbb{E}X_{n+1}}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu, \\ \text{var}(L_n) &= \frac{\text{var}(X_n) + \text{var}(X_{n+1})}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}, \\ \text{cov}(L_n, L_{n+1}) &= \mathbb{E}L_n L_{n+1} - \mathbb{E}L_n \mathbb{E}L_{n+1} = \frac{1}{4} \mathbb{E}(X_n + X_{n+1})(X_{n+1} + X_{n+2}) - \mu^2 \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{E}X_n \mathbb{E}X_{n+1} + \mathbb{E}X_n \mathbb{E}X_{n+2} + \mathbb{E}X_{n+1}^2 + \mathbb{E}X_{n+1} \mathbb{E}X_{n+2}) - \mu^2 \\ &= \frac{1}{4} (\mu^2 + \mu^2 + \sigma^2 + \mu^2 + \mu^2) - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{4}, \\ \text{cor}(L_n, L_{n+1}) &= \frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Platí: $L_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2}$ a $L_{n+k} = \frac{X_{n+k} + X_{n+k+1}}{2}$. Vieme, že $X_n, X_{n+1}, X_{n+k}, X_{n+k+1}$ sú nezávislé, teda aj L_n a L_{n+k} sú nezávislé, a teda $\text{cov}(L_n, L_{n+k}) = 0, k = 2, 3, \dots$. \square

Teraz sa bližšie pozrieme na vlastnosti L_1 .

Veta 8 (Vlastnosti L_1 pri OPO).

Nech množina P je generovaná obyčajným procesom obnovy, potom pre veľkosť L_1 Voroného bunky budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_1 = \frac{3}{2}\mu,$
- $\text{var}(L_1) = \frac{5}{4}\sigma^2,$
- $\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{\sigma^2}{4},$
- $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots,$
- $\text{cor}(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{1}{10}}.$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}L_1 &= \mathbb{E}X_1 + \frac{\mathbb{E}X_2}{2} = \frac{3}{2}\mu, \\ \text{var}(L_1) &= \text{var}(X_1) + \frac{\text{var}(X_2)}{4} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} = \frac{5}{4}\sigma^2, \\ \text{cov}(L_1, L_2) &= \mathbb{E}L_1L_2 - \mathbb{E}L_1\mathbb{E}L_2 = \mathbb{E}\left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right)\left(\frac{X_2 + X_3}{2}\right) - \frac{3}{2}\mu^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2 + 2\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_3 + \mathbb{E}X_2^2 + \mathbb{E}X_2\mathbb{E}X_3\right) - \frac{3}{2}\mu^2 \\ &= \frac{1}{4}(2\mu^2 + 2\mu^2 + \sigma^2 + \mu^2 + \mu^2) - \frac{3}{2}\mu^2 = \frac{\sigma^2}{4}, \\ \text{cor}(L_1, L_2) &= \frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}\sigma^2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{10}}.\end{aligned}$$

Platí: $L_1 = X_1 + \frac{X_2}{2}$ a $L_k = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$. Vieme, že X_1, X_2, X_k, X_{k+1} sú nezávislé, teda aj L_1 a L_k sú nezávislé, a teda $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots$. \square

2.2.2 P generovaná modifikovaným procesom obnovy

Teraz sa zameriame na situáciu, kedy je množina generátorov P generovaná modifikovaným procesom obnovy. Máme teda množinu nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín $\{X_2, X_3, \dots\}$ s rozptylom σ^2 a strednou hodnotou μ , pre ktoré platí $\mathbb{P}(X_i > 0) = 1, i = 2, 3, \dots$ a na nich nezávislú náhodnú veličinu X_1 so strednou hodnotou $\hat{\mu}$ a rozptylom $\hat{\sigma}^2$. Rovnako ako v prípade obyčajného procesu obnovy, pre body množiny P platí: $P_k = \sum_{i=1}^k X_i, k = 1, 2, \dots$. Vrcholy Voroného mozaiky ležia v strede medzi dvoma susednými generátormi, teda množina vrcholov $W = \{W_1, W_2, \dots\}$, kde $W_k = \frac{P_k + P_{k+1}}{2}$. Pre veľkosť L_k Voroného

buniek platí: $L_k = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$, $k = 2, 3, \dots$ a $L_1 = X_1 + \frac{X_2}{2}$. Opäť sa zameriame na vlastnosti veľkosti Voroného buniek. Pre $n > 1$ budú platiť rovnaké vzťahy ako v predošlom prípade.

Veta 9 (Vlastnosti L_n pri MPO).

Nech množina P je generovaná modifikovaným procesom obnovy, potom pre veľkosť L_n Voroného bunky, kde $n > 1$, budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_n = \mu$,
- $\text{var}(L_n) = \frac{\sigma^2}{2}$,
- $\text{cov}(L_n, L_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{4}$,
- $\text{cov}(L_n, L_{n+k}) = 0, k = 2, 3, \dots$,
- $\text{cor}(L_n, L_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Dôkaz.

Skúmané vlastnosti L_n nezávisia od X_1 . Tvrdenie preto plynie z vety o vlastnostiach L_n pri OPO (Veta 7). □

Veta 10 (Vlastnosti L_1 pri MPO).

Nech množina P je generovaná modifikovaným procesom obnovy, potom pre veľkosť L_1 Voroného bunky budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_1 = \hat{\mu} + \frac{\mu}{2}$,
- $\text{var}(L_1) = \hat{\sigma}^2 + \frac{\sigma^2}{4}$,
- $\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{\sigma^2}{4}$,
- $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots$,
- $\text{cor}(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{8\hat{\sigma}^2 + 2\sigma^2}}$.

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}L_1 &= \mathbb{E}X_1 + \frac{\mathbb{E}X_2}{2} = \hat{\mu} + \frac{\mu}{2}, \\
\text{var}(L_1) &= \text{var}(X_1) + \frac{\text{var}(X_2)}{2} = \hat{\sigma}^2 + \frac{\sigma^2}{4}, \\
\text{cov}(L_1, L_2) &= \mathbb{E}L_1L_2 - \mathbb{E}L_1\mathbb{E}L_2 = \mathbb{E}\left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right)\left(\frac{X_2 + X_3}{2}\right) - \left(\hat{\mu} + \frac{\mu}{2}\right)\mu \\
&= \frac{\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2}{2} + \frac{\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_3}{2} + \frac{\mathbb{E}X_2^2}{4} + \frac{\mathbb{E}X_2\mathbb{E}X_3}{4} - \left(\hat{\mu} + \frac{\mu}{2}\right)\mu \\
&= \frac{\hat{\mu}\mu}{2} + \frac{\hat{\mu}\mu}{2} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{4} + \frac{\mu^2}{4} - \left(\hat{\mu} + \frac{\mu}{2}\right)\mu = \frac{\sigma^2}{4}, \\
\text{cor}(L_1, L_2) &= \frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\sigma^2}{4}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}} = \sqrt{\frac{(\sigma^2)^2}{16} \frac{4}{4\hat{\sigma}^2 + \sigma^2} \frac{2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{8\hat{\sigma}^2 + 2\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Platí: $L_1 = X_1 + \frac{X_2}{2}$ a $L_k = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$. Vieme, že X_1, X_2, X_k, X_{k+1} sú nezávislé, teda aj L_1 a L_k sú nezávislé, a teda $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots$. □

2.2.3 P generovaná rovnovážnym procesom obnovy

Teraz sa zameriame na situáciu, kedy je množina generátorov P generovaná rovnovážnym procesom obnovy. Máme teda množinu nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín $\{X_2, X_3, \dots\}$ s rozptylom σ^2 a obecnými momentmi μ_k , pre ktoré platí $P(X_i > 0) = 1, i = 2, 3, \dots$ a na nich nezávislú náhodnú veličinu X_1 s vlastnosťami odpovedajúcimi rovnovážnemu procesu obnovy. Rovnako ako v prípade obyčajného procesu obnovy pre body množiny P platí: $P_k = \sum_{i=1}^k X_i, k = 1, 2, \dots$. Vrcholy Voroného mozaiky ležia v strede medzi dvoma susednými generátormi, teda množina vrcholov $W = \{W_1, W_2, \dots\}$, kde $W_k = \frac{P_k + P_{k+1}}{2}$. Pre veľkosti L_k Voroného buniek platí: $L_k = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \dots$ a $L_1 = X_1 + \frac{X_2}{2}$.

Opäť sa zameriame na vlastnosti veľkosti Voroného buniek. Pre $n > 1$ budú platiť rovnaké vzťahy ako v predošlom prípade, keďže rovnovážny proces obnovy je špeciálny prípad modifikovaného procesu obnovy. Bližšie sa však pozrieme na prípad L_1 .

Veta 11 (Vlastnosti L_1 pri RPO).

Nech množina P je generovaná rovnovážnym procesom obnovy, potom pre veľkosť Voroného bunky L_1 budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_1 = \frac{\mu_2 + \mu_1^2}{2\mu_1},$
- $\text{var}(L_1) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} + \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_2^2 + \mu_1^4}{4\mu_1^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{\sigma^2}{4},$
- $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots$

Dôkaz.

Plynie z vety o vlastnostiach L_1 pri MPO (Veta 10) dosadením hodnôt $\hat{\mu} = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ a $\hat{\sigma}^2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2}$. □

2.2.4 P generovaná Poissonovým procesom

Ako sme si ukázali vo Vete 3, ak budeme pre obyčajný, respektíve rovnovážny proces obnovy uvažovať náhodné veličiny s exponenciálnym rozdelením s parametrom λ , dostaneme Poissonov proces s intenzitou λ . Pozrieme sa teraz bližšie na vlastnosti Voroného buniek, ktoré dostaneme z tohto Poissonovho procesu.

Veta 12 (Vlastnosti L_n pri Poissonovom procese).

Nech množina P je generovaná Poissonovým procesom s intenzitou λ , potom pre veľkosť L_n Voroného bunky, kde $n > 1$, budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_n = \frac{1}{\lambda},$
- $\text{var}(L_n) = \frac{1}{2\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_n, L_{n+1}) = \frac{1}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_n, L_{n+k}) = 0, k = 2, 3, \dots,$
- $\text{cor}(L_n, L_{n+1}) = \frac{1}{2},$
- $f_{L_n}(x) = 4\lambda^2 x e^{-2\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\}.$

Dôkaz.

Plynie z vety o vlastnostiach L_n pri OPO (Veta 7) a faktu, že $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ a $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Ďalej:

$$\begin{aligned}
 f_{L_n}(x) &= \left(f_{\frac{X_n}{2}} * f_{\frac{X_{n+1}}{2}} \right) (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\frac{X_n}{2}}(x-t) f_{\frac{X_{n+1}}{2}}(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2f_{X_n}(2(x-t)) 2f_{X_{n+1}}(2t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\lambda e^{-2\lambda(x-t)} \mathbb{I}\{x-t > 0\} 2\lambda e^{-2\lambda t} \mathbb{I}\{t > 0\} dt \\
 &= 4\lambda^2 \int_0^x e^{-2\lambda x} dt \mathbb{I}\{x > 0\} = 4\lambda^2 x e^{-2\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\}.
 \end{aligned}$$

□

Veta 13 (Vlastnosti L_1 pri Poissonovom procese).

Nech množina P je generovaná Poissonovým procesom s intenzitou λ , potom pre veľkosť L_1 Voroného bunky budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_1 = \frac{3}{2\lambda},$
- $\text{var}(L_1) = \frac{5}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_k) = 0, k = 3, 4, \dots,$
- $\text{cor}(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{1}{10}},$
- $f_{L_1}(x) = 2\lambda(e^{-\lambda x} - e^{-2\lambda x}) \mathbb{I}\{x > 0\}.$

Dôkaz.

Plynie z vety o vlastnostiach L_1 pri OPO (Veta 8) a faktu, že $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ a $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Ďalej:

$$\begin{aligned}
 f_{L_1}(x) &= \left(f_{X_1} * f_{\frac{X_2}{2}} \right) (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x-t) f_{\frac{X_2}{2}}(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{I}\{x-t > 0\} 2\lambda e^{-2\lambda t} \mathbb{I}\{t > 0\} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda(x+t)} dt \mathbb{I}\{x > 0\} = 2\lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} dt \mathbb{I}\{x > 0\} \\
&= 2\lambda^2 e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x \mathbb{I}\{x > 0\} = -2\lambda e^{-\lambda x} (e^{-\lambda x} - 1) \mathbb{I}\{x > 0\} \\
&= 2\lambda (e^{-\lambda x} - e^{-2\lambda x}) \mathbb{I}\{x > 0\}.
\end{aligned}$$

□

2.2.5 Rozšírenie Poissonovho procesu na celé \mathbb{R}

Poissonov proces môžeme rozšíriť na celé \mathbb{R} nasledujúcim spôsobom. Nech $\{X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, \dots\}$ je postupnosť nezávislých veličín s exponenciálnym rozdelením s parametrom λ . Množinu P definujeme ako $\{\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_1, P_2, \dots\}$, kde $P_k = \sum_{i=1}^k X_i$ a $P_{-k} = -\sum_{i=1}^k X_{-i}$, $k \in \mathbb{N}$. Pre vrcholy Voroného mozaiky bude platiť:

$$\begin{aligned}
W_k &= \frac{P_k + P_{k+1}}{2} = \sum_{i=1}^k X_i + \frac{X_{k+1}}{2}, k = 1, 2, 3, \dots, \\
W_{-k} &= \frac{P_{-k} + P_{-k-1}}{2} = -\sum_{i=1}^k X_{-i} - \frac{X_{-k-1}}{2}, k = 1, 2, 3, \dots, \\
W_0 &= \frac{P_1 + P_{-1}}{2} = \frac{X_1 - X_{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Pre veľkosti Voroného buniek bude platiť:

$$\begin{aligned}
L_k &= W_k - W_{k-1} = \sum_{i=1}^k X_i + \frac{X_{k+1}}{2} - \left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i + \frac{X_k}{2} \right) \\
&= \frac{X_k + X_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \dots, \\
L_{-k} &= W_{-k+1} - W_{-k} = -\sum_{i=1}^{k+1} X_{-i} - \frac{X_{-k}}{2} - \left(-\sum_{i=1}^k X_{-i} - \frac{X_{-k-1}}{2} \right) \\
&= \frac{X_{-k} + X_{-k-1}}{2}, k = 2, 3, \dots, \\
L_1 &= W_1 - W_0 = X_1 + \frac{X_2}{2} - \frac{X_1 - X_{-1}}{2} = \frac{X_2 + X_1 + X_{-1}}{2}, \\
L_{-1} &= W_0 - W_{-1} = \frac{X_1 - X_{-1}}{2} - \left(-X_{-1} - \frac{X_{-2}}{2} \right) = \frac{X_1 + X_{-1} + X_{-2}}{2}.
\end{aligned}$$

Pre $L_n, n > 1$ budú platiť vlastnosti L_n rovnako ako v prípade Poissonovho procesu na \mathbb{R}^+ (Veta 12). Zo symetrie budú tieto vlastnosti platiť aj pre L_{-n} . (V prípade vlastností týkajúcich sa L_n a L_{n+k} budeme uvažovať pri symetrii L_{-n} a L_{-n-k}). Taktiež platí: $\text{cov}(L_n, L_{-k}) = 0$, $k, n > 1$ z toho, že sú funkciami navzájom nezávislých náhodných veličín.

Veta 14 (Vlastnosti L_1 pri Poissonovom procese na \mathbb{R}).

Nech množina P je generovaná homogénnym Poissonovým procesom s intenzitou λ na \mathbb{R} , potom pre veľkosť L_1 Voroného bunky budú platiť nasledujúce tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_1 = \frac{3}{2\lambda},$
- $\text{var}(L_1) = \frac{3}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_{-1}) = \frac{1}{2\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_1, L_{-2}) = 0,$
- $P(0 \in V_1) = \frac{1}{2}.$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}L_1 &= \frac{\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_{-1} + \mathbb{E}X_2}{2} = \frac{3}{2\lambda}, \\
\text{var}(L_1) &= \frac{\text{var}(X_1) + \text{var}(X_{-1}) + \text{var}(X_2)}{4} = \frac{3}{4\lambda^2}, \\
\text{cov}(L_1, L_{-1}) &= \mathbb{E}L_1L_{-1} - \mathbb{E}L_1\mathbb{E}L_{-1} \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}[(X_1 + X_2 + X_{-1})(X_1 + X_{-2} + X_{-1})] - \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}X_{-1}^2 + 2\mathbb{E}X_1X_{-1} + \mathbb{E}X_1X_2 + \mathbb{E}X_1X_{-2} \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}X_{-1}X_2 + \mathbb{E}X_{-1}X_{-2} + \mathbb{E}X_2X_{-2}\right) - \frac{9}{4\lambda^2} \\
&= \frac{11}{4\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}, \\
\text{cov}(L_1, L_2) &= \mathbb{E}L_1L_2 - \mathbb{E}L_1\mathbb{E}L_2 \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}[(X_1 + X_2 + X_{-1})(X_2 + X_3)] - \frac{3}{2\lambda^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}X_1X_2 + \mathbb{E}X_1X_3 + \mathbb{E}X_2^2 + \mathbb{E}X_2X_3 + \mathbb{E}X_{-1}X_2 \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}X_{-1}X_3\right) - \frac{3}{2\lambda^2} \\
&= \frac{7}{4\lambda^2} - \frac{6}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Platí, že L_1 je funkciou X_1, X_{-1}, X_2 a L_{-2} je funkciou X_{-2}, X_{-3} . Vieme, že $X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, X_{-3}$ sú navzájom nezávislé, teda aj L_1, L_{-2} sú navzájom nezávislé, a teda $\text{cov}(L_1, L_{-2}) = 0$.

Pre 0 platí: $P(0 \in V_1) = P(W_0 < 0) = P(X_1 < X_{-1}) = 1 - P(X_{-1} < X_1)$. Keďže sú X_1 a X_{-1} rovnako rozdelené, musí pre ne platiť, že $P(X_1 < X_{-1}) = P(X_{-1} < X_1) = \frac{1}{2}$, a teda $P(0 \in V_1) = \frac{1}{2}$.

□

Pre L_{-1} budú zo symetrie platiť podobné tvrdenia:

- $\mathbb{E}L_{-1} = \frac{3}{2\lambda},$
- $\text{var}(L_{-1}) = \frac{3}{4\lambda^2},$
- $\text{cov}(L_{-1}, L_{-2}) = \frac{1}{4\lambda^2},$

- $\text{cov}(L_{-1}, L_2) = 0$,
- $P(0 \in V_{-1}) = \frac{1}{2}$.

Napriek tomu, že je proces generátorov stacionárny, tak rozdelenie L_1 a L_{-1} je odlišné od rozdelenia L_n pre $|n| > 1$. Môžeme si všimnúť, že stredná dĺžka bunky, ktorá obsahuje bod 0, je jedenapolkrát väčšia než stredná dĺžka ostatných buniek. Je to dané spôsobom výberu bunky obsahujúcej 0, ktorý uprednostňuje dlhšie bunky. V teórii stacionárnych náhodných mozaík sa zavádza pojem typickej bunky. Zhruba povedané ide o náhodne vybranú bunku mozaiky. Presná matematická definícia je založená na ergodickej teórii a Palmovom rozdelení. Ak označíme L_0 dĺžku bunky, ktorá obsahuje 0, a L dĺžku typickej bunky, tak platí vzťah $E L_0 = \frac{E L^2}{E L}$, viz Theorem 10.4.1 v [6]. V našom konkrétnom prípade Voroného mozaiky generovanej homogénnym Poissonovým procesom je podľa Vety 14 dĺžka L_0 rovná L_1 alebo L_{-1} s pravdepodobnosťami $\frac{1}{2}$ a jej stredná hodnota je $\frac{3}{2\lambda}$. Momenty dĺžky L typickej bunky možno nájsť vo Vete 12 a vidíme, že skutočne splňujú:

$$\frac{E L^2}{E L} = \frac{\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Voroného mozaika v \mathbb{R}^2

3.1 Obecná Voroného mozaika v \mathbb{R}^2

Presunieme sa do \mathbb{R}^2 . Množina P bude lokálne konečná množina $\{P_1, P_2, \dots\}$. V \mathbb{R}^2 už nemá zmysel požadovať usporiadanie tejto množiny, preto tento predpoklad nebudeme uvažovať.

Veta 15 (Voroného mozaika v \mathbb{R}^2).

Nech $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ je lokálne konečná množina bodov, ktorá splňa podmienku $\text{conv}(P) = \mathbb{R}^2$ a V je ňou generovaná Voroného mozaika, potom Voroného bunky V_i sú uzavreté konvexné mnohouholníky.

Ak existuje hrana Voroného mozaiky oddelujúca bunky V_i a V_j , tak je časťou osi úsečky $P_i P_j$.

Pre vrcholy W_i Voroného mozaiky platí, že W_i leží v strede kružnice prechádzajúcej aspoň tromi bodmi P a vnútri kružnice sa nenachádza žiadny ďalší bod P , obrátene pre každú takúto kružnicu existuje bod W_j , ktorý leží v jej strede.

Dôkaz.

Z dôkazu Vety 4 vyplýva, že Voroného bunka V_i je 2-polytop, teda V_i je uzavretý konvexný mnohouholník.

Nech $x \in \mathbb{R}^2$ leží na hrane oddelujúcej bunky V_i a V_j , $j \neq i$. Potom platí, že $x \in V_i \cap V_j$, teda z Lemma 5 platí, že x leží na priamke kolmej na $P_i P_j$ ktorá prechádza stredom medzi P_i a P_j , teda x leží na osi $P_i P_j$.

Nech teraz x leží vo vrchole spoločnom pre bunky V_i, V_j, V_k , kde $j \neq k \neq i \neq j$. Potom platí, že $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$, teda musí platiť:

$$\|x - P_i\| = \|x - P_j\| = \|x - P_k\| \leq \|x - P_l\|, \forall l : i \neq l, j \neq l, k \neq l.$$

Z predchádzajúcej časti dôkazu vieme, že musí ležať na osi úsečiek $P_i P_j, P_i P_k$ a $P_j P_k$. Z vlastnosti trojuholníka vieme, že x musí byť stred kružnice opísanej trojuholníku $P_i P_j P_k$ a zároveň musí platiť, že každý ďalší bod množiny P leží buď mimo alebo na hranici tejto kružnice.

Naopak uvažujme, že máme takúto kružnicu, potom pre jej stred musí platiť, že $\exists i, j, k \in \mathbb{N} : i \neq j \neq k \neq i$ tak, že platí:

$$\|x - P_i\| = \|x - P_j\| = \|x - P_k\| \leq \|x - P_l\|, \forall l : i \neq l, j \neq l, k \neq l,$$

a teda $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$. Z toho vyplýva, že x je vrchol Voroného mozaiky. \square

Ukázali sme si základne vlastnosti jednotlivých buniek, hrán a vrcholov Voroného mozaiky v \mathbb{R}^2 . Teraz sa pozrime na vlastnosti Voroného mozaiky ako celku.

Veta 16 (Regularita a normalita Voroného mozaiky v \mathbb{R}^2).

Nech $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ je lokálne konečná množina bodov \mathbb{R}^2 a V je ňou generovaná Voroného mozaika, potom mozaika V je regulárna a je normálna práve vtedy, keď pre každú kružnicu prechádzajúcu aspoň tromi bodmi množiny P , vnútri ktorej sa nenachádza žiadny ďalší bod P , prechádza práve tromi bodmi P .

Dôkaz.

Vieme, že podmienka regularity je vždy splnená pre $s = 0$ a $s = n = 2$. Zostáva teda overiť pre $s = 1$. Predpokladajme, že podmienka nie je splnená, a teda existuje bunka V_i a jej hrana a , ktorá nie je hranou mozaiky. Musia teda existovať dve s ňou susedné bunky V_a a V_b , pre ktoré platí, že hrany medzi V_i, V_a a V_i, V_b sú časťami úsečky a . Keďže ide o Voroného mozaiku, úsečka a musí byť časťou osí úsečiek $P_i P_a$ a zároveň $P_i P_b$, teda $P_a = P_b$. Z toho vyplýva, že $V_a = V_b$, čiže dve také rôzne bunky nemôžu existovať. To nám dáva spor. Teda hrana a musí byť hranou mozaiky. Tým máme hotový dôkaz regularity.

Mozaika v \mathbb{R}^2 je normálna práve vtedy, ak každá jej s -faseta leží na hranici $2 - s + 1$ buniek pre $s \in \{0, 1\}$. 1-faseta (hrana) môže v \mathbb{R}^2 oddeľovať iba dve bunky, preto pre $s = 1$ je podmienka splnená. 0-faseta (vrchol) však môže ležať na hranici ľubovoľného počtu buniek. Mozaika V je teda normálna práve vtedy, keď každý vrchol W_i leží na hranici práve troch buniek.

Nech teda $W_i \in V_a \cap V_b \cap V_c$, potom platí, že

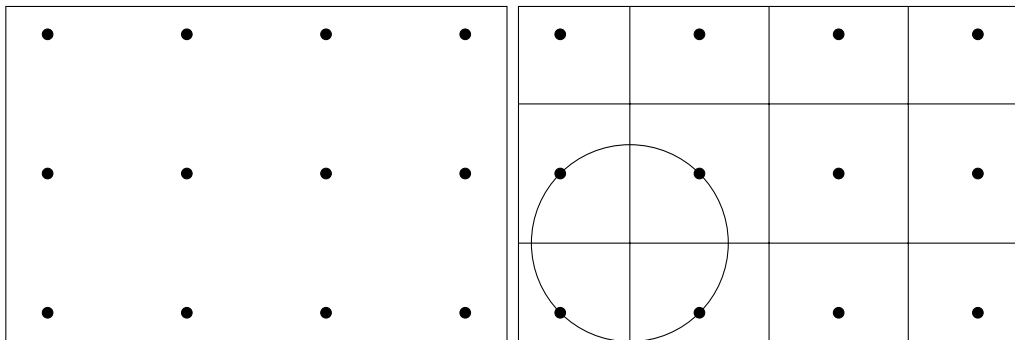
$$\|W_i - P_a\| = \|W_i - P_b\| = \|W_i - P_c\| \leq \|W_i - P_j\|, j \neq a, j \neq b, j \neq c.$$

Ak bod P_d leží tiež na kružnici so stredom W_i prechádzajúcej P_a, P_b, P_c , potom platí, že $\|W_i - P_a\| = \|W_i - P_d\|$, teda $W_i \in V_d$. Tým pádom leží W_i na hranici štyroch buniek, a z toho vyplýva, že V nie je normálna.

Ak V nie je normálna, potom musí existovať bod W_i , ktorý leží na hranici aspoň štyroch buniek. Musia teda existovať rôzne body P_a, P_b, P_c, P_d tak, že

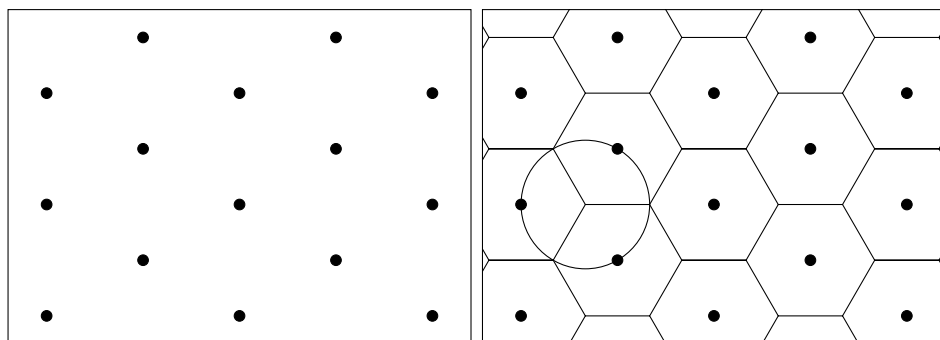
$$\|W_i - P_a\| = \|W_i - P_b\| = \|W_i - P_c\| = \|W_i - P_d\| \leq \|W_i - P_j\|, \\ j \neq a, j \neq b, j \neq c, j \neq d.$$

Uvažujme kružnicu so stredom W_i a polomerom $\|W_i - P_a\|$, potom táto kružnica prechádza aspoň štyrmi bodmi P a vnútri sa nenachádza žiaden ďalší bod P . □



Obr. 3.1: Vľavo množina generátorov $P = \mathbb{Z}^2$ a vpravo ňou generovaná Voroného mozaika v \mathbb{R}^2 .

Pozrime sa bližšie na niektoré špeciálne prípady generátorov Voroného mozaiky v rovine. Uvažujme najprv, že množina $P = \mathbb{Z}^2$, teda Voroného mozaika je generovaná bodmi s celočíselnými súradnicami. Takto generovaná Voroného mozaika bude tvoriť štvorcovú sieť s množinou vrcholov $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Výsledná Voroného mozaika – ako možno vidieť na obrázku 3.1 – zjavne nie je normálna,



Obr. 3.2: Vľavo množina generátorov P usporiadaná do pravidelných trojuholníkov a vpravo ňou generovaná Voroného mozaika v \mathbb{R}^2 .

vrcholy sú na prieniku štyroch Voroného buniek a kružnica so stredom vo vrchole prechádza štyrmi bodmi množiny P .

Ďalším príkladom množiny generátorov P môžu byť body usporiadané do pravidelných rovnostranných trojuholníkov. V tomto prípade bude výsledná Voroného mozaika šesťuholníková sieť. Šesťuholníková sieť v \mathbb{R}^2 je – ako možno vidieť na obrázku 3.2 – normálna mozaika. Každý vrchol je na rozhraní troch Voroného buniek a kružnica so stredom vo vrchole prechádza tromi bodmi množiny P .

3.2 Náhodne generovaná mozaika v \mathbb{R}^2

V \mathbb{R}^2 budeme uvažovať množinu P generovanú homogénnym Poissonovým procesom s intenzitou λ . Poissonov proces je lokálne konečný skoro iste, takže takto skonštruovaná množina generátorov nám vyhovuje. Zároveň platí, že žiadne štyri body neležia na jednej kružnici skoro iste, teda môžeme o takto skonštruovanej Voroného mozaike predpokladať, že je normálna skoro iste. Príklad Voroného mozaiky generovanej Poissonovým procesom nájdeme na obrázku 3.3.

Charakteristiky takto skonštruovanej Voroného mozaiky, ktoré nás budú zaujímať, sú stredná hodnota počtu vrcholov λ_0 , stredná hodnota počtu hrán λ_1 , (uvažovať budeme stred hrany ako referenčný bod), stredná hodnota počtu buniek λ_2 (ako referenčný bod budeme uvažovať bod množiny P , ktorý danú bunku generuje) v jednotkovom štvorci. Ďalej nás bude zaujímať stredná hodnota a rozptyl počtu vrcholov (respektíve hrán) Voroného typickej bunky $\mathbb{E}N$ a $\text{var}(N)$, stredná hodnota a rozptyl obvodu Voroného typickej bunky $\mathbb{E}O$ a $\text{var}(O)$, stredná hodnota a rozptyl obsahu Voroného typickej bunky $\mathbb{E}A$ a $\text{var}(A)$ a stredná hodnota a rozptyl dĺžky hrany Voroného mozaiky $\mathbb{E}L$ a $\text{var}(L)$.

V [7] nájdeme, že pre tieto hodnoty platí:

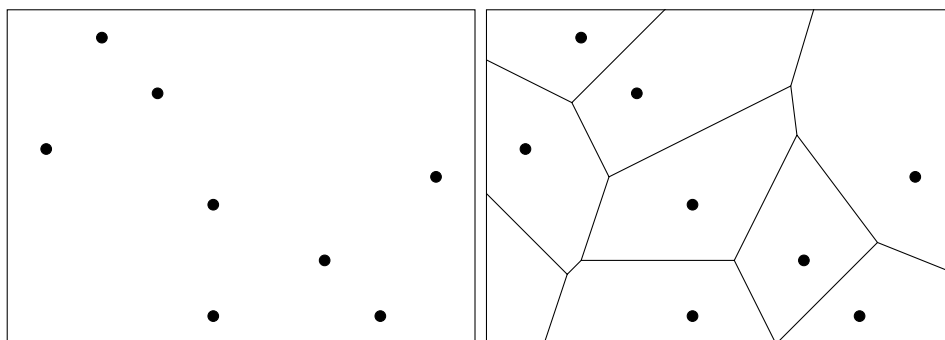
- $\lambda_0 = 2\lambda$,
- $\lambda_1 = 3\lambda$,
- $\lambda_2 = \lambda$,
- $\mathbb{E}N = 6$,
- $\text{var}(N) \approx 1,781$,
- $\mathbb{E}O = \frac{4}{\sqrt{\lambda}}$,
- $\text{var}(O) \approx \frac{1,945}{\lambda}$,
- $\mathbb{E}A = \frac{1}{\lambda}$,
- $\text{var}(A) \approx \frac{0,280}{\lambda^2}$,
- $\mathbb{E}L = \frac{2}{3\sqrt{\lambda}}$,
- $\text{var}(L) \approx \frac{0,186}{\lambda}$.

Hodnoty stredných hodnôt sú uvedené presne, hodnoty rozptylov sú uvedené iba približne. Niektoré z hodnôt si rozoberieme, ako sa k nim dopracovať. Z predpokladov máme, že Voroného mozaika V je skoro iste normálna, teda typický vrchol sa nachádza na hranici troch buniek. Pre priemerný počet vrcholov $\mathbb{E}N$ bunky mozaiky v \mathbb{R}^2 platí:

$$\mathbb{E}N = \frac{2\delta}{\delta - 2},$$

kde δ je stredný počet hrán, ktoré sa zbierajú vo vrcholoch. V našom prípade platí: $\delta = 3$, a z toho dostávame výsledok $\mathbb{E}N = 6$. Pre strednú hodnotu počtu bodov P v jednotkovom štvorci λ_2 platí z definície Poissonovho rozdelenia, že je rovná λ . Každá hrana leží na hranici dvoch a každý vrchol leží na hranici troch

buniek. Z tohto a z faktu, že $\mathbb{E}N = 6$, plynie $\lambda_1 = 3\lambda$, $\lambda_0 = 2\lambda$. Keďže máme v jednotkovom štvorci priemerne λ buniek, bude platiť pre obsah jednej z nich $\mathbb{E}A = \frac{1}{\lambda}$.



Obr. 3.3: Vľavo náhodne generovaná množina generátorov P a vpravo ňou generovaná Voroného mozaika v \mathbb{R}^2 .

4. Voroného mozaika v \mathbb{R}^3

V tejto kapitole sa pozrieme na Voroného mozaiky v \mathbb{R}^3 . Množinu generátorov P bude tvoriť lokálne konečná množina bodov $\{P_1, P_2, \dots\}$. Ako v prípade \mathbb{R}^2 ani teraz nebudeme požadovať, aby bola táto množina nejako usporiadaná.

Veta 17 (Voroného mozaika v \mathbb{R}^3).

Nech $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ je lokálne konečná množina bodov, ktorá spĺňa podmienku $\text{conv}(P) = \mathbb{R}^3$, a V je ňou generovaná Voroného mozaika, potom Voroného bunky V_i sú kompaktné konvexné mnohosteny.

Ak existuje stena oddeľujúca bunky V_i a V_j , tak je časťou roviny prechádzajúcej bodom $\frac{P_i + P_j}{2}$, ktorej normálou je priamka so smernicou $P_i - P_j$.

Nech a je hrana mozaiky V , potom existujú aspoň tri body množiny P , pre ktoré platí, že a je časťou priamky \hat{a} kolmej na rovinu, v ktorej ležia, a prienik \hat{a} s touto rovinou je stred kružnice, ktorá prechádza týmito tromi bodmi.

Pre vrcholy Voroného mozaiky platí, že ležia v strede gule, na ktorej hranici sa nachádzajú aspoň štyri body množiny P a vnútri sa nenachádza žiadny ďalší bod množiny P .

Dôkaz.

Z dôkazu Vety 4 vyplýva, že Voroného bunka V_i je 3-polytop. To znamená, že V_i je kompaktný konvexný mnohosten.

Nech $x \in \mathbb{R}^3$ leží na stene oddeľujúcej bunky V_i a V_j , $j \neq i$. Potom platí, že $x \in V_i \cap V_j$, teda z Lemma 5 platí, že x leží na rovine kolmej na $P_i P_j$, ktorá prechádza stredom medzi P_i a P_j .

Nech $x \in a \subset \hat{a}$ teda x leží na hrane mozaiky, potom x musí patriť hraniciam aspoň troch buniek. Nech sú to bunky V_i, V_j, V_k , $j \neq k \neq i \neq j$. Potom platí, že $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$, teda musí platiť:

$$\|x - P_i\| = \|x - P_j\| = \|x - P_k\| \leq \|x - P_l\|, \forall l : i \neq l, j \neq l, k \neq l.$$

Z predchádzajúcej časti dôkazu potom plynie, že priamka \hat{a} je kolmá na vektory $(P_j - P_i)$, $(P_j - P_k)$ a $(P_k - P_i)$. Body P_i, P_j a P_k neležia na jednej priamke, inak by platilo $V_i \cap V_j \cap V_k = \emptyset$. Platí teda, že \hat{a} je kolmá na rovinu $P_i P_j P_k$. Stred c kružnice prechádzajúcej bodmi P_i, P_j a P_k zjavne leží v rovine $P_i P_j P_k$ a splňuje $\|c - P_i\| = \|c - P_j\| = \|c - P_k\|$. Z toho vyplýva, že leží aj na priamke \hat{a} . Keďže rovina sa s priamkou na ňu kolmou pretína práve v jednom bode, je tento bod určený jednoznačne. Teda prienikom roviny $P_i P_j P_k$ a priamky \hat{a} je stred kružnice prechádzajúcej bodmi P_i, P_j a P_k .

Ak bod x leží vo vrchole Voroného mozaiky, potom musí patriť hraniciam aspoň štyroch buniek. Nech sú to bunky V_i, V_j, V_k, V_l , i, j, k, l navzájom rôzne. Potom platí, že $x \in V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l$, a teda musí platiť:

$$\|x - P_i\| = \|x - P_j\| = \|x - P_k\| = \|x - P_l\| \leq \|x - P_m\|$$

$$\forall m : i \neq m, j \neq m, k \neq m, l \neq m.$$

Z toho je zrejmé, že ak vezmeme guľu so stredom v bode x a polomerom $\|x - P_i\|$, tak bude spĺňať požadované parametre.

□

Zoznam použitej literatúry

- [1] Jesper Møller and Rasmus Plenge Waagepetersen. *Statistical inference and simulation for spatial point processes*. Number 100 in Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall, 2003.
- [2] Karl Sigman. Notes on the Poisson process. [cit. 23.05.2021]. Dostupné na internete: <http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-PP.pdf>, 2009.
- [3] Claudia Lautensack and Sergei Zuyev. Random Laguerre tessellations. *Advances in Applied Probability*, 40(3):630–650, 2008.
- [4] Filip Dohnálek. Náhodné mozaiky. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2010.
- [5] Jesper Møller. Random tessellations in \mathbb{R}^d . *Advances in Applied Probability*, 21(1):37–73, 1989.
- [6] Rolf Schneider and Wolfgang Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and Its Applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [7] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, and Sung Nok Chiu. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc., 2nd edition, 2000.